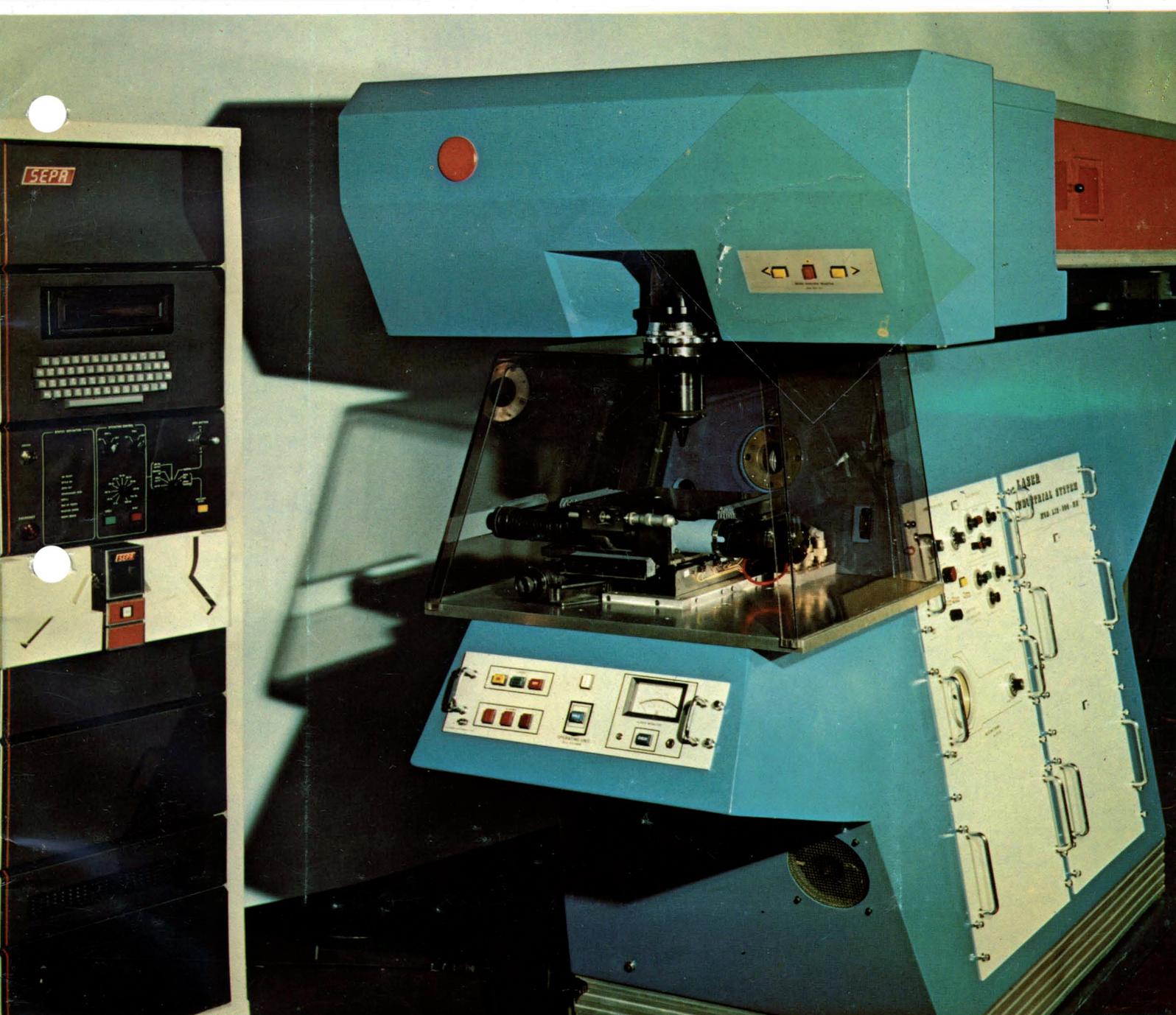


E 2688 FX

# laser + elektro- optik 4



DM 12,50  
Stuttgart  
Oktober 1980  
12. Jahrgang



Erste deutschsprachige  
Fachzeitschrift für Laser, Elektro-Optik  
und Strahlentechnik

Industrielle Anwendungen · Materialbearbeitung  
Chemie · Nachrichten- und  
Messtechnik · Medizin · Umweltforschung

## Versuch's und beweis es: Nr. 4 Try and Prove it: No. 4

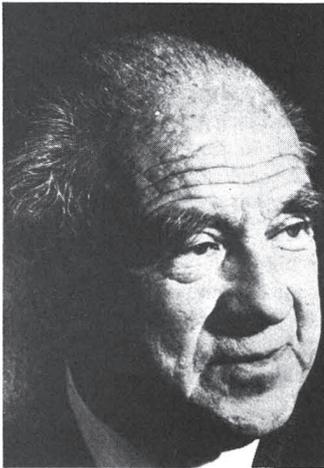


Bild 1 Prof. Werner Heisenberg, Entdecker der Unbestimmtheitsrelation und Schöpfer der Matrizenmechanik (5.12.1901 Würzburg bis 1.1.1976 München).

«Heisenberg war berüchtigt dafür, dass er sich nie gern einer Kamera stellte», erzählte die Photographin Lieselotte Strelow. «Aber da entspannte, intensive Bilder dieser grossen Wissenschaftler so sehr gesucht wurden, habe auch ich eines Tages den Versuch unternommen. Kaum hatte ich einige Male auf den Auslöser gedrückt, als Heisenberg auch schon wieder aufstand: (Ich will doch nicht den Rest meines Lebens vor Ihrer Kamera verbringen.) Aber bevor er die Tür erreichte, rief ich ihm, nur mühsam beherrscht, nach: (Jetzt wundert mich nicht, Herr Professor, dass es kein gutes Portrait von Ihnen gibt und geben wird, wenn Sie diese Erde mal verlassen haben werden.) Er stutzte und kehrte dann auf seinen Stuhl zurück. (Stichhaltigen Argumenten gegenüber war Heisenberg immer zugänglich.) (Mit freundlicher Genehmigung Lieselotte Strelow)[6]

### Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation im Modellexperiment

Im Jahre 1927 zeigten J. Davisson und H. Germer durch Reflexion von Elektronen an Nickeleinkristallen, später an Durchstrahlungsaufnahmen dünnster ZnO-Schichten, dass sich Reflexions- bzw. Beugungsverhalten gut beschreiben lässt, wenn man dem materiellen Teilchen Elektron Welleneigenschaften zuschreibt. Damit war der experimentelle Nachweis einer Theorie gelungen, die Louis de Broglie bereits am 25. November 1924 in seiner Dissertation an der Sorbonne verteidigte, in der er jeder bewegten Masse Wellencharakter zuschrieb, bei dem Prüfungskollegium jedoch wohl mehr Lob für die Eleganz der Darstellung einholte als für den Inhalt, wie sich einer der Prüfer – Charles Mauguin – erinnert:

«Wie verhielt sich nun die Prüfungskommission, während sie der mit ungewöhnlicher formaler Eleganz und grosser Überzeugungskraft vorgetragenen Darstellung dieser These lauschte? Es wurden natürlich die Originalität und Tiefe der Gedanken des Kandidaten anerkannt und gebührend gewürdigt, (dass er mit bemerkenswerter Meisterschaft ein Bemühen durchgeführt habe, das versucht werden musste, um die Schwierigkeiten zu überwinden, in der sich die Physiker befanden)» (Bericht von Paul Langevin).

Ich muss jedoch ein Geständnis machen. Bei Aufstellung der These habe ich nicht an die physikalische Realität der mit den Materiekörnchen gekoppelten Wellen geglaubt. Ich sah in ihnen vielmehr reine Schöpfung des Verstandes, die insofern sehr interessant waren, als sie es zum ersten Male möglich machten, über den rein empirischen Charakter der Quantelungsregeln hinauszukommen, für die sie eine einfache, fast vertraut anmutende Erklärung analog den Gesetzen schwingender Saiten erbrachten. Heute fällt es mir schwer, diese Einstellung zu begreifen, die es mir möglich machte, eine Erklärung der Sachverhalte gelten zu lassen, ohne an die physikalische Realität der Gebilde zu glauben, die diese Erklärung lieferten.

Erst nach den Experimenten von Davisson und Germer (1927), von G. P. Thomson (1928) und erst als ich die schönen Aufnahmen (Elek-

*The fourth experiment in this series is concerned with Heisenberg's uncertainty principle one of the fundamentals of modern quantum mechanics. In the model-experiments described here photons are used to show the behaviour of micro particles while trying to get information about location and momentum simultaneously.*

*The realization is performed for large audience demonstrations. Acknowledgement: The financial assistance in form of a scholarship from the «Studienstiftung des Deutschen Volkes» without which this series could not have been achieved is greatly appreciated.*

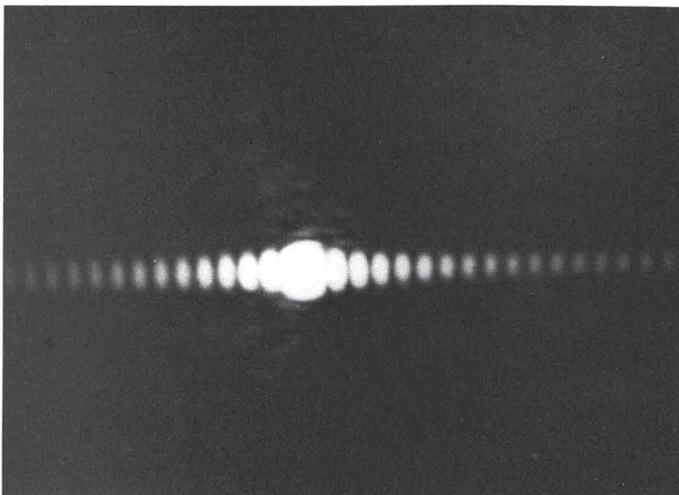
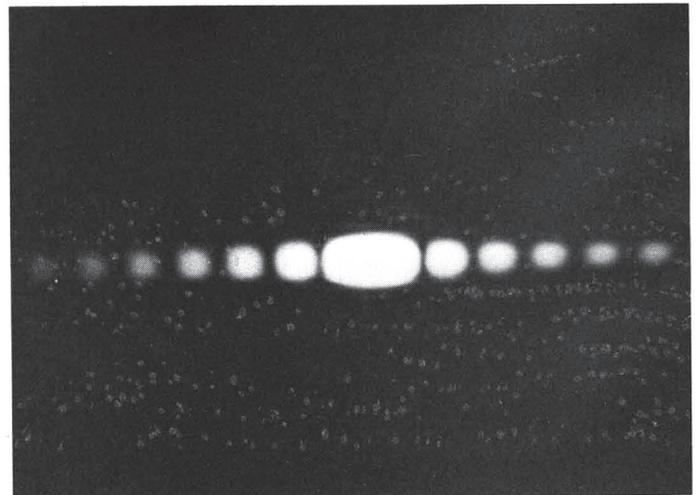
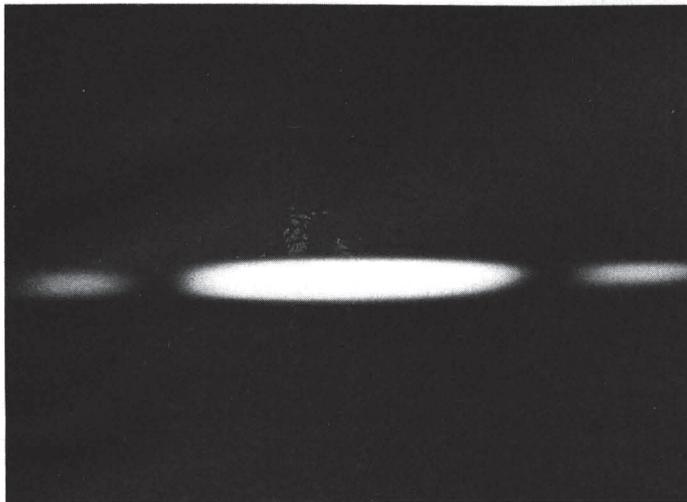


Bild 2 Beugung von He-Ne-Laserlicht am Einfachspalt a:  $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$



b:  $\Delta x = 0,2 \text{ mm}$



c:  $\Delta x = 0,05 \text{ mm}$

tronenbeugung durch feine Filme von ZnO) in Händen hielt, die Ponte an der Ecole Normale gelungen waren, begriff ich, wie inkonsequent, lächerlich und unsinnig meine Einstellung war. Die Diagramme der Elektronenbeugung waren den von mir mit Röntgenstrahlen erzielten so ähnlich, dass ich wohl zugeben musste, dass die de Broglie-Wellen die gleiche physikalische Realität besaßen wie die elektromagnetischen Wellen, da sie wie diese gebeugt werden und interferieren.

So hat uns de Broglie nur mit der Kraft der Vernunft einen Grundaspekt des materiellen Universums enthüllt, der uns bis dahin tief verborgen geblieben war.» [1]

Es zeigt sich hier ein grundlegender Dualismus in der Natur, der von Albert Einstein bereits bei seiner Deutung des Fotoeffektes aufgespürt worden war, allerdings für Teilchen ohne Ruhemasse (Photonen).

Das Plancksche Quantenpostulat verknüpft die Energie eines Photons mit der Frequenz:

$$E = \eta \nu \quad \nu = \text{Frequenz} \\ \eta = \text{Plancksches}$$

Wirkungsquantum

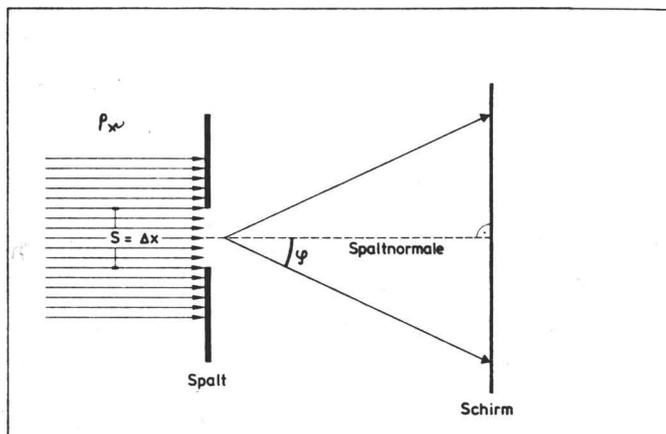


Bild 3 Zur Herleitung der Unbestimmtheitsrelation: Photonen fallen mit  $P_x$  auf die Spaltöffnung und bei genügend kleinem  $\Delta x$  (steigende Genauigkeit der Ortsbestimmung) tritt eine  $P_y$ -Impulskomponente nach dem Spalt auf (steigende Impulsunschärfe).

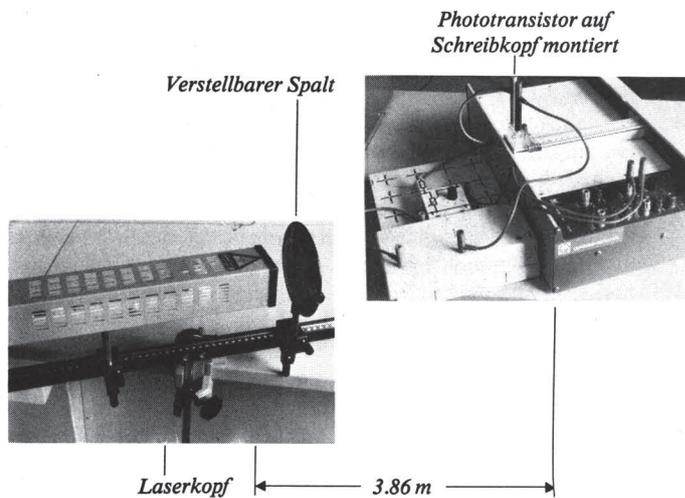


Bild 4 Anordnung zur automatischen Aufzeichnung des Intensitätsverlaufs in den Spaltbildern mit x-y-Messschreiber (vgl. Bild 2a-c).

Gemäss der allgemeinen Relativitätstheorie konnte nun jeder Energie ein Äquivalent an träger Masse zugesprochen werden.

$$E = mc_0^2 \quad c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

Diese beiden Energien können im Falle des Photons gleichgesetzt werden:

$$\eta \nu = mc_0^2$$

Damit ergibt sich für den Impuls eines Lichtquants:

$$p = mc_0 = \frac{\eta}{\lambda} \quad (\text{mit } c = \lambda \cdot \nu)$$

In einem kühnen ad-hoc-Postulat übertrug de Broglie diese Impulsbeziehung auch auf bewegte materielle Teilchen, indem er  $c_0$  gegen  $v$  ( $v < c_0$ ) substituierte.

Damit ergibt sich für den Impuls eines bewegten Teilchens, das mit Ruhemasse behaftet ist:

$$p = m \cdot \omega = \frac{\eta}{\lambda}$$

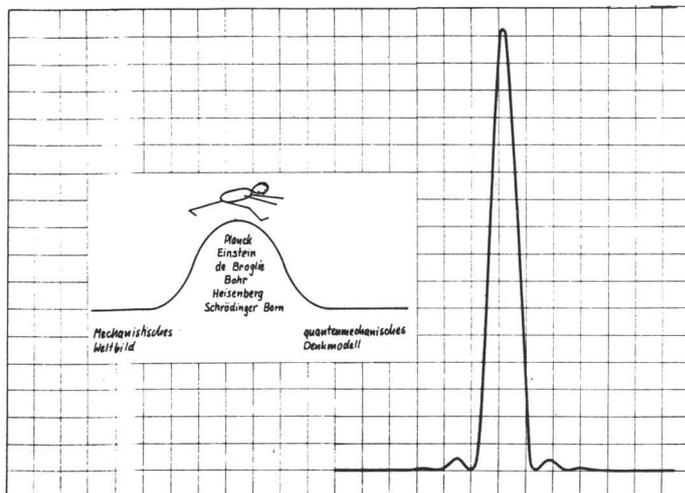


Bild 5 Intensitätsverlauf im Spaltbild  $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$

Und die Materiewellenlänge beträgt:

$$\lambda = \frac{v}{m\omega}$$

Um nun auf das Problem der Lokalisation von Mikroobjekten bzw. zur gleichzeitigen Bestimmung zweier ihrer Variablen zu stossen, war die obige Ableitung nötig, um kurz die Herkunft des Wellencharakters von Elektronen zu zeigen, ausserdem wurde belegt, dass wir per Analogie auch mit Photonen arbeiten können, was experimentell weniger Aufwand erfordert. Prinzipiell lassen sich die folgenden Experimente auch mit Elektronen durchführen. [2]

Kürzlich erschien sogar eine Arbeit, die an die Unschärferelation das Ergebnis der Fourier-Transformation in der Akustik darstellt. [3] Heisenbergs fundamentale Beziehung lautet:

$$\Delta p \cdot \Delta X^u \approx h$$

Sie sagt aus, dass das Produkt der Unsicherheiten von sogenannten kanonisch konjugierten Variablen wie etwa Ort und Impuls, Energie und Zeit... eine Wirkung in der Grössenordnung der Planckkonstante darstellt.

Wollte man z.B. ein Elektron unter dem Mikroskop betrachten, so ist die Ortsbestimmung durch die Wellenlänge des verwendeten Lichts in ihrer Unschärfe begrenzt.

Das einfallende Licht liefert jedoch nicht nur Beugungsinformation über das «beleuchtete» Elektron, sondern verhält sich beim Kontakt wie ein Photon und überträgt gemäss den von Compton aufgestellten Streuformeln einen Teil seines Impulses auf das Elektron.

Das Ausmass der Impulsübertragung ist im Einzelfalle nicht bekannt, jedoch stellt sie einen Bruchteil des obig abgeleiteten Impulses  $p = h/\lambda$  des Lichtquants dar, je nach der «Vorgeschichte» des Streuprozesses kommen alle Werte von  $0-h/\lambda$  vor.

Nehmen wir die multiplikative Verknüpfung zur Wirkungsgrösse vor, so erhalten wir:

$$\lambda \cdot \frac{h}{\lambda} = h$$

Wollen wir die Ortsbestimmung verfeinern, so sinkt die Wellenlänge, damit steigt die Energie und der übertragene Impuls. Setzt man in die Beziehung

$$\Delta \omega = \frac{h}{\Delta x^0 m}$$

verschiedene Testmassen ein, so zeigt sich, dass die Unbestimmtheitsrelation im makroskopischen Bereich vernachlässigbar ist, jedoch mit fallender Masse im Reich atomarer Grössen die Gültigkeit der Newtonschen Punktmechanik ad absurdum geführt wird.

Die Geschwindigkeitsunschärfe für ein materielles Teilchen ( $10^{-8}$  kg) beträgt bei der vorgegebenen Ortsunsicherheit ( $10^{-6}$ m) etwa  $10^{-21}$ ms<sup>-1</sup>. Die gleiche Betrachtung liefert für die Geschwindigkeitsunschärfe eines Elektrons ( $9 \cdot 10^{-31}$ kg) bei einer Ortsunsicherheit in der Grössenordnung von Atomradien ( $10^{-10}$ m) einen Wert von  $7000$  kms<sup>-1</sup>(!).

#### Demonstration der Unbestimmtheitsrelation im Modell-experiment mit Photonen [4]

Ein Helium-Neon-Laser (0,5 mW) wird auf der optischen Bank zusammen mit einem verstellbaren Spalt montiert. Den Strahl lasse

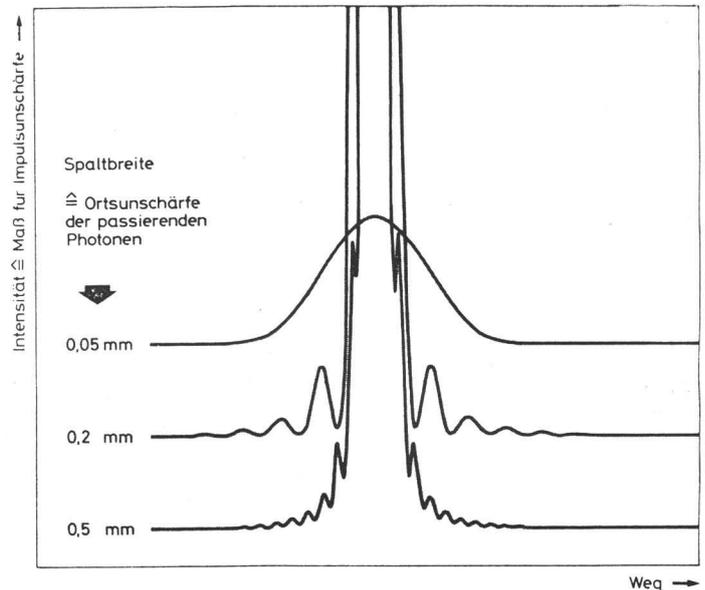


Bild 6 Intensitätsverlauf in den Spaltbildern von Bild 2 (Maximum 0, Ordnung zwecks besserer Darstellung der weiteren Maxima oben «abgeschnitten»).

man auf die einige Meter entfernte Hörsaalwand fallen und beobachte bei Verdunkelung (Bild 2).

Bild 3 zeigt den Vorgang schematisch. Photonen mit dem Linearimpuls  $P_x$  treffen auf den Spalt. Bei hinreichend kleiner Spaltöffnung zeigen sich auf dem dahinter aufgestellten Schirm die Maxima und Minima eines Einfachspaltbildes, genügend kleine Spaltöffnung vorausgesetzt (Bild 2). Die Ortsunsicherheit der passierenden Photonen ist gleich der Spaltbreite.

Ist die Spaltöffnung weit, so zeigt sich kein Beugungsbild, d.h. durch die Ortsbestimmung (= Passieren der Spaltöffnung) tritt keine Impulsunschärfe in y-Richtung auf, der Strahl verläuft (in der Abb. gestri-

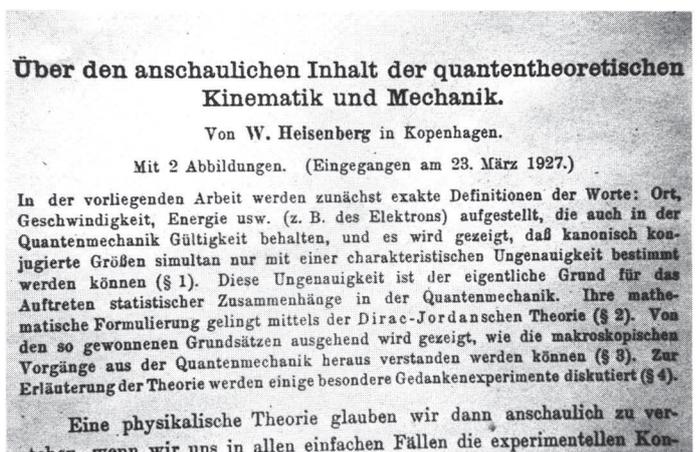


Bild 7 «Es war eine ganz abenteuerliche Zeit, voll von Überraschungen und Enttäuschungen, von Erfolgen und von tiefliegenden Schwierigkeiten, deren Diskussion uns bis an die Grundlagen aller physikalischen Erkenntnis geführt hat.» (Werner Heisenberg)

chelt) wie geometrisch vorherbestimmbar. Bei ständiger Verkleinerung der Spaltöffnung, was gleichbedeutend ist mit immer präziserer Ortsinformation treten die typischen Beugungsbilder auf (Maxima 0, 1, 2, ... Ordnung) oder statistisch betrachtet, die Photonen erhalten beim Passieren eine mehr oder minder grosse Störimpulskomponente in y-Richtung ( $P_y$ ).

Dies zeigt sich deutlich darin, dass mit sinkender Spaltbreite die einzelnen Maxima immer mehr in die «Breite» gezogen werden (Bild 2).

### Bestimmung der Intensitätsverteilung im Spaltbild in Abhängigkeit von der Ortsunschärfe

Mit der aus Bild 4 ersichtlichen Anordnung kann man die Intensitätsverteilung im Spaltbild aufzeichnen. Man befestigt am Arm eines XY-Schreibers mittels Doppelklebeband ein Fotoelement so, dass dieses bei einer an den X-Eingang gelegten Dreiecksspannung geeigneter Amplitude und Frequenz langsam durch das Spaltbild wandert. Die dabei «abgefahren» Intensität wird mittels nachgeschalteter Elektronik als Signal auf die Y-Achse gegeben und man erhält so eine Ortsintensitätsaufzeichnung.

Bilder 5 und 6 zeigen derartige Aufzeichnungen.

Als Heisenbergs berühmte Arbeit (Bild 7) über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik 1927 erschien, [5] reagierte sein Kollege Wolfgang Pauli enthusiastisch: «Morgenröte der Neuzeit. Es wird Tag in der Quantentheorie» [6].

In dieser Arbeit, in der Heisenberg die Grenzen des Begriffsrasters unserer Sprache (hinsichtlich der Begriffe Ort und Impuls) aufzeigte und die strenge Gültigkeit des Kausalitätsprinzips für immer auf die klassische Mechanik beschränkte, schrieb er abschliessend:

«... Aber an der scharfen Formulierung des Kausalgesetzes: «Wenn wir die Gegenwart genau kennen, können wir die Zukunft berechnen», ist nicht der Nachsatz, sondern die Voraussetzung falsch. Wir können die Gegenwart in allen Bestimmungsstücken prinzipiell nicht kennenlernen. Deshalb ist alles Wahrnehmen eine Auswahl aus einer Fülle von Möglichkeiten und eine Beschränkung des zukünftig Möglichen. Da nun der statistische Charakter der Quantentheorie so eng an die Ungenauigkeit der Wahrnehmung geknüpft ist, könnte man zu der Vermutung verleitet werden, dass sich hinter der wahrgenommenen statistischen Welt noch eine «wirkliche Welt» verberge, in der das Kausalgesetz gilt. Aber solche Spekulationen scheinen uns, das betonen wir ausdrücklich, unfruchtbar und sinnlos. Die Physik soll nur im Zusammenhang der Wahrnehmungen formal beschreiben, vielmehr kann man den wahren Sachverhalt besser so charakterisieren: Weil alle Experimente den Gesetzen der Quantenmechanik und damit der Gleichung (32) unterworfen sind, so wird durch die Quantenmechanik die Ungültigkeit des Kausalgesetzes definitiv festgestellt.» [5]

#### Literatur:

- [1] Mauguin, Ch.: Louis de Broglies Doktorthese in: Louis de Broglie und die Physiker, Claassen Verlag, Hamburg 1955.
- [2] Schpolski, E. W.: Atomphysik, Hochschullehrbücher für Physik, Hrsg.: Rompe, R., Schmutzer, R., VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.
- [3] Karrenberg, U.: «Experimentelle Darstellung der Unschärferelation in der Akustik» in: Praxis der Naturwissenschaften – Physik, 29 (1980), 119–121.
- [4] Schwankner, R.: Laseranwendungen in der Experimentalchemie – Ein Praktikum, Carl Hanser Verlag, München–Wien 1978.
- [5] Heisenberg, W.: «Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik» in: Zeitschrift für Physik, 43 (1927), 173–198 (s. Bild 7), vgl. dazu: Weizsäcker, C. F. v., B. L. van der Waerden: Werner Heisenberg, Reihe Hanser 228, Carl Hanser Verlag, München–Wien 1976.
- [6] Hermann, A.: «Zum Tode von Werner Heisenberg. Eine Würdigung», in bild der wissenschaft 13 (3/1970), 52 ff.

Im allgemeinen Fall gilt jedoch anstelle (6) die Gleichung (4) bzw. (4a), wobei die Fokussierung jeweils der Entfernung  $R$  anzupassen ist, und zwar derart, dass sich die Strahltaile gemäss Gleichung (5) im Abstand  $z^{\text{opt}}$  vor der Fokussierungsoptik befindet.

Im Fall maximaler Fokussierung liegt die Strahltaile nach (5) immer zwischen Fokussierungsoptik und Ziel. Sie rückt allerdings bei kleinem Abstand in die Nähe des Ziels, bei grossem dicht an das Teleskop.

Die Gleichung (4a) enthält zunächst keine Aussage über die Abhängigkeit der Bündelung von der Öffnung der Fokussierungsoptik. Man könnte diese Öffnung gleich  $2w_1$  setzen. Jedoch lehrt die Resonatortheorie, dass durch einen Kreis mit dem Durchmesser  $2w$  nur 86,5% der Strahlleistung fliessen. Daraus folgt, dass der Durchmesser der Fokussierungsoptik grösser als  $2w_1$  sein muss, weil andernfalls

- ein Teil der Sendeleistung verlorenginge, eventuell auch die Fassung des optischen Systems zu heiss würde,
- Der gaußsche Strahl durch Abschneiden der Intensität im Randbereich deformiert würde, was eine zusätzliche Aufweitung des Strahls im Fernfeld und das Auftreten von Beugungsringen zur Folge hätte.

Wie gross man die Fokussierungsoptik wirklich macht, ist bis zu einem gewissen Grad willkürlich. Wir schlagen vor, eine Sendeoptik mit dem Durchmesser

$$d = \pi w_1 \quad (7)$$

als angepasst zu bezeichnen. Sie erfasst 99,3% der Strahlleistung.

Bei Verwendung einer im Sinne einer solchen Konvention angepassten Optik ergibt sich nach (4a) der minimale Strahldurchmesser  $D$  bei optimaler Fokussierung auf die Entfernung  $R$  zu

$$D = 2w_2 = 2\lambda R/d. \quad (8)$$

In der Praxis sind die Fälle häufig, in denen die oben eingeführte modifizierte Fresnelzahl  $G$  einen mittleren Wert hat. Mit (7) ist

$$G = d^2/p\lambda R \quad (7a)$$

Verwendet man beispielsweise bei Anwendungen des  $\text{CO}_2$ -Lasers ( $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$ ) in der Fernanalyse ein Teleskop mit 32 cm Durchmesser und richtet man den Strahl auf ein Ziel in 3 km Entfernung, so ist  $G = 1,0$ .

Bei optimaler Bündelung liegt die Strahltaile in diesem Fall in der Mitte zwischen Sendeort und Ziel ( $z^{\text{opt}} = r/2$ ). Der Strahldurchmesser ist im Ziel genauso gross wie am Sendeort ( $D = 2w_2 = 20 \text{ cm}$ ).

Mit einem Teleskop von 10 cm oder 1 m Öffnung wird  $G = 0,10$  bzw.  $G = 10,0$ . Um eine maximale Bündelung im Abstand  $R = 3 \text{ km}$  zu erreichen, muss nach Gleichung (5) die Taile ca. 30 m vor die Sendeoptik bzw. 30 m vor das Ziel gelegt werden. Der Strahldurchmesser im Ziel ergibt sich zu  $D = 64 \text{ cm}$  bzw. 6,4 cm.

Durch Vergleich mit den Ergebnissen früherer Arbeiten [2] findet man, dass bei optimaler Bündelung der Krümmungsradius der auf das Ziel auftreffenden Wellenfronten gleich dem Abstand zwischen der Fokussierungsoptik und dem Ziel ist, das heisst der Krümmungsmittelpunkt liegt stets auf der Fokussierungsoptik. Auch diese Aussage ist von praktischem Interesse, z. B. in Hinblick auf die Phasenbedingungen für optimalen Überlagerungsempfang.

#### Literatur

- [1] Boyd, G. D. u. J. P. Gordon: Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers, Bell System Techn. Journal 40 (1961), 489–508.
- [2] Kleen, W. u. R. Müller: Laser, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1969, S. 72.

*Strahlverlauf bei maximaler Bündelung auf die Entfernung  $R$ , nicht massstäblich. Die Strahltaile liegen zwischen Fokussierungsoptik und Ziel.*